2. Kolokwium z RRZw, 20.05.2023

G.Filipuk, N.Mokrzański, T.Piasecki, P.Rybka, M.Szlenk, H.Żołądek

Kolokwium trwa od 9:00 do 12:00, osoby uprawnione piszą do 12:45. W trakcie kolokwium studenci nie mogą komunikować się, ani korzystać z żadnych dodatkowych pomocy.

Ważne: Każde zadanie powinno być zapisane na osobnej kartce. Prosimy o staranne uzasadnianie odpowiedzi.

Zadanie 1. (10 punktów)
Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x_1'(t) = & x_1(t) + x_2(t) - x_3(t), & x_1(0) = 1, \\ x_2'(t) = & -x_1(t) + 3x_2(t) - x_3(t), & x_2(0) = 2, \\ x_3'(t) = & -x_1(t) + x_2(t) + x_3(t), & x_3(0) = 2. \end{cases}$$

Wartości własne macierzy układu są znane, są one równe 1, 2, 2.

Zadanie 2. (10 punktów)
Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$(t-1)\,\ddot{x} - (t+1)\,\dot{x} + 2x = 0,$$

wiedząc, że jego szczególnym rozwiązaniem jest $x_s(t) = t^2 + a$ dla pewnego a (jakie jest a?).

Zadanie 3. (10 punktów)
Mamy zagadnienie początkowe z parametrem

$$\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 1 - \lambda x^2, \; x(0) = \frac{1}{2}, \; \dot{x}(0) = -1.$$

Znaleźć $\frac{\partial x}{\partial \lambda}|_{\lambda=0}(t)$.

Zadanie 4. (po 10 punktów za części a) i b); część b) jest dodatkowa i nieobowiązkowa)
Załóżmy, że ciągłe odwzorowanie $A : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ spełnia warunek

$$\forall\, t > 0, \; y \in \mathbb{R}^n : \quad y^T A(t) y \le -\theta \|y\|^2$$

dla pewnej dodatniej stałej θ. Rozważmy zagadnienie początkowe

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + h(t) \;\text{ dla }\; t > 0, \quad x(0) = x_0,$$

gdzie $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą. Wykazać, że

a) jeżeli $h \equiv 0$ (tzn. równanie jest jednorodne), a x jakimkolowiek jego rozwiązaniem, to istnieje $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$ oraz znaleźć tę granicę;

b) jeżeli $\|h(t)\| \le \frac{5}{1+t^2}$ dla $t \in [0, \infty)$, to dla dowolnego warunku początkowego rozwiązanie jest ograniczone na $[0, +\infty)$.

Wskazówka: Może się przydać znalezienie nierówności różniczkowej dla funkcji $u(t) = \|x(t)\|^2$.